

- 1) **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych $z = (x, y)$, gdzie $x = \operatorname{Re} z$ to część rzeczywista liczby z , zaś $y = \operatorname{Im} z$ to część urojona liczby z . Liczbę zespoloną $i = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną. Ponadto $i^2 = -1$.
- 2) Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych są działaniami łącznymi i przemiennymi. Dodatkowo mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.
- 3) Liczbę $z = (x, y) = x + yi$ nazywamy **postacią algebraiczną** liczby zespolonej z . Definiujemy też liczby $-z = (-x, -y) = -x - yi$ przeciwną do z oraz $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$ sprzężoną do z .
- 4) Niech $z = x + yi$. Liczbę $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy **modułem** liczby zespolonej i jest to odległość liczby z od $(0, 0)$. Liczba $|z_1 - z_2|$ wyraża odległość liczb z_1, z_2 na płaszczyźnie zespolonej.
- 5) Własności liczb zespolonych:
 - a) $\overline{(\bar{z})} = z$
 - b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
 - c) $|\bar{z}| = |z|$
 - d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 - e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 - f) Jeśli $z_2 \neq 0$, to $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$
 - g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 - h) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 - i) Jeśli $z_2 \neq 0$, to $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
 - j) $|z^n| = |z|^n$
- 6) Każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą układ $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej $z = (x, y) \neq (0, 0)$ i oznaczamy $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Dla $z = (0, 0)$ dowolna liczba rzeczywista jest jej argumentem. **Argumentem głównym** liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy ten argument, który należy do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ i oznaczamy $\arg z$. Co więcej $\arg(0) := 0$.
- 7) Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ oraz $\varphi = \operatorname{Arg} z$, to postać $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazywamy postacią **trygonometryczną** liczby zespolonej z .
- 8) Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ oraz $|z| = r$, to postać $z = r e^{i\varphi}$ nazywamy postacią **wykładniczą** liczby zespolonej z .

Zadanie 1. Wykonaj działania:

a) $(1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i),$

b) $\frac{z-w}{z+w}$ dla $z = 4 - 3i$ oraz $w = -1 + 2i.$

Zadanie 2. Wyznacz:

a) $\operatorname{Im} \left[\frac{(1-6i) \cdot (i^3-1)}{(2-5i)^2} \right],$

b) $\frac{\overline{3-2i}}{(-1+2i)^2(3+i)},$

c) $\operatorname{Re}[(2-i)^3 - (1-i^7)],$

Zadanie 3. Niech $w = \frac{z+i}{(2-i)z}$. Narysuj zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których:

a) liczba w jest rzeczywista,

b) liczba w jest czysto urojona ($\operatorname{Re} w = 0$),

c) $\operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w,$

d) $\operatorname{Re} w \leq \operatorname{Im} w.$

Zadanie 4. Rozwiąż poniższe układy w zbiorze liczb zespolonych:

a)
$$\begin{cases} (1+i)z - iw = i - 4 \\ (-2i+3)z + (2+i)w = 11 + 9i \end{cases},$$

b)
$$\begin{cases} (3+i)z + (1+i)w = 5 + i \\ (i-4)z - (2+3i)w = -4 - 3i \end{cases}.$$

Zadanie 5. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej następujące liczby:

a) $z = -3i - 3,$

b) $z = \sin \alpha - i \cos \alpha, \alpha \in \mathbb{R},$

c) $z = \overline{(\sqrt{3} - i)2i}.$

d) $z = \frac{4-4i}{\sqrt{3+i}},$